بینهایت، فرایندهای نامتناهی و یک اشتباه منطقی

علی برهمند
گروه ریاضی، واحد همدان، دانشگاه آزاد اسلامی، همدان، ایران

چکیده – مفهومی به نام بینهایت، به عنوان یکی از مهمترین مفاهیم و در عین حال، منشا اصلی اکثر پارادوکس ها در ریاضیات بوده که ذهن ریاضیدانان و فیلسوفان را سالیان سال به خود مشغول کرده و هنوز هم مورد مناقشه است. این مطالعه، ضمن مرور برخی از تحقیقات انجام گرفته در مورد بینهایت و فرایندهای نامتناهی با رویکرد آموزشی در دو زمینه ی اصلی، شامل مقایسه مجموعه های نامتناهی و دنباله های نامتناهی، به دسته بندی مهمترین عوامل مشکل ساز و اشتباهات موجود دانش آموزان در مقولات اشاره شده می پردازد.

کلید واژه- بینهایت. مقایسه مجموعه های نامتناهی. دنباله های نامتناهی. تعمیم از حالت متناهی به نامتناهی.

۱. مقدمه

مفهوم بینهایت[۱]، یکی از مهمترین مفاهیم در ریاضیات بوده که با اکثر مفاهیم کلیدی در سطوح مختلف آن مانند مجموعه ها، حد، احتمال و نظریه اعداد مرتبط بوده و با علوم دیگری مانند فیزیک، فلسفه و منطق نیز گره خورده است. به علاوه، اکثر پارادوکس های[۲] ریاضی ، مانند پارادوکس معروف راسل[۳] در مورد وجود مجموعه ای شامل همه ی مجوعه ها، یا برخی از پارادوکس های زنون[۴] راجع به حرکت، و یا پارادوکس های جدیدتری مانند هتل بزرگ هیلبرت[۵]، آشیل و لاکپشت[۶] و توپ تنیس[۷]، همگی با مفهوم بینهایت ارتباط تنگاتنگی دارند. البته، همان طور که گراهام و کانتور (۲۰۱۵) نیز بیان می کنند، پاسخ یا ابطال این پارادوکس ها به هیچ وجه کار آسانی نیست. از این رو، بنا به گفته شهریاری (۱۳۸۰)، مفهوم بینهایت هیچ گاه مورد قبول شهود گرایان نبوده و حتی برخی از دانشمندان مطرح یونانی نیز از آن گریزان بودند. چرا که از نظر آن ها، بینهایت به مثابه موجود وحشتناکی است که قوانین عقلی و منطقی را بر هم می زند. مملو و زازکیس (۲۰۰۸) نیز اشاره می کنند که مفهوم بینهایت، با خاصیت معماگونه ی خود، ذهن ریاضیدانان را برای مدت های طولانی درگیر کرده و چالشی جدی برای آن ها بوجود آورده که سابقه ی این چالش، به سالها قبل از میلاد بر می گردد. به هر حال، بررسی تاریخ پر فراز و نشیب جدال بر سر وجود یا عدم وجود بینهایت، قبول یا رد بینهایت به عنوان یک فرایند یا یک شی، وجود یک بینهایت یا انواع مختلف آن در ریاضیات و چالش هایی از این قبیل ، نشان می دهد که بینهایت، به هیچ وجه موضوع ساده و پیش پا افتاده ای نبوده و نیازمند توجه ای ویژه است. از طرف دیگر، تلاش برای رفع این چالش ها در برخی موارد سبب ورود مفاهیم جدیدی مانند حد به ریاضیات شد و همان طور که کندراتیوا (۲۰۰۹) اشاره می کند، رد پای پارادوکس های زنون را در ابداع حساب دیفرانسیل و انتگرال می توان جستجو کرد و از این حیث، مفهومی به نام بینهایت در گسترش علم ریاضی تاثیر زیادی داشته است. در همین راستا، شاخه هایی مانند نظریه مجموعه ها، با الهام گرفتن ریاضی دان برجسته جورج کانتور[۸] از ایده بینهایت های بالقوه[۹] و بینهایت بالفعل[۱۰] به وجود آمد. به هر حال، علی رغم نقش مهم بینهایت در ریاضیات، همان گونه که ادواردس (۱۹۹۷) و مناقان (۲۰۰۱) اشاره کرده اند، از نظر آموزشی به مفهوم بینهایت به اندازه ی کافی پرداخته نشده، در حالی که مطالعات متعددی نشان می دهند که اکثر دانش آموزان در درک مفهوم بینهایت با مشکلات گوناگونی مواجه هستند. این در حالی است که، همان طور که

دابیتسکی و همکاران (۲۰۰۵) اشاره می کنند، بینهایت در برنامه درسی ریاضی مدرسه ای جایگاه ویژه ای داشته و این حوزه، از حیث مطالعه و پژوهش، همواره باید مورد توجه آموزشگران ریاضی واقع شود. به عقیده ی وی، با وجود تحقیقات انجام گرفته در خصوص بینهایت، هنوز هم نیازمند مطالعات بیشتر و جدیدتر در این زمینه هستیم و به همین دلیل، در دو دهه ی گذشته، بخش زیادی از تحقیقات آموزش ریاضی در این حوزه متمرکز شده است. یک نگاه اجمالی به تحقیقات انجام گرفته در این زمینه نشان می دهد که در مطالعات آموزشی، بینهایت ها معمولا به دو نوع کلی "بینهایت های بزرگ[۱۱]" و "بینهایت های کوچک[۱۲]" دسته بندی می شوند. عمده ی مطالعات انجام شده در مورد بینهایت های بزرگ، در دو دسته شامل مقایسه مجموعه های نامتناهی و کاردینال[۱۳] آن ها، قابل دسته بندی بوده و در خصوص بینهایت های کوچک، مفهوم حد و میل کردن در دنباله های نامتناهی، محور اصلی مطالعات است. این مطالعه، ضمن مرور برخی از تحقیقات انجام گرفته با رویکرد آموزشی به مفهوم بینهایت در دو زمینه ی اصلی شامل مقایسه ی مجموعه های نامتناهی[۱۴] و دنباله های نامتناهی[۱۵] و دسته بندی نتایج حاصل، به دنبال ریشه یابی مهمترین عوامل مشکل ساز در تفکر دانش آموزان می باشد.

۲. مقایسه مجموعه های نامتناهی

یکی از روش های مرسوم مطالعه رفتار دانش آموزان و دانشجویان در حالت های نامتناهی که بیشتر از سایر روش ها مورد توجه آموزشگران ریاضی قرار گرفته، مقایسه مجموعه های نامتناهی است(کتو و همکاران ،۲۰۰۹ : مملو ، ۲۰۱۴ : سمیر و دریفوس ،۲۰۰۲ : سمیر و تیرش ،۲۰۰۷). اگر این مجموعه ها را به دو صورت کلی شمارا و ناشمارا در نظر بگیریم، مشاهده می شود که بخش عمده پژوهش ها به سمت مجموعه های شمارا متمایل می باشد. در خصوص مجموعه های ناشمارا، آنچه مورد نظر اکثر آموزشگران ریاضی می باشد، مقایسه کاردینال بازه هایی با طول های متفاوت بوده و در مورد مجموعه های شمارای نامتناهی، مقایسه مجموعه هایی که در ظاهر متفاوت به نظر می رسند، حائز اهمیت است. برخی تحقیقات انجام شده در این خصوص مانند تحقیق تال (۱۹۹۲) و یا مطالعه ی ساکریستان و نوس (۲۰۰۸)، اندازه ی مجموعه ها و درک دانش آموزان راجع به کاردینال مجموعه های نامتناهی و مقایسه ی آن ها بر همین اساس را بررسی کرده اند و برخی از محققین مانند تیروش (۱۹۹۹) و دوال (۱۹۸۳) رابطه ی بین مجموعه های نامتناهی و زیر مجوعه هایشان را مورد کنکاش قرار داده اند. نتایج اکثر این تحقیقات نشان می دهد که دانش آموزان در مورد مقایسه مجموعه های نامتناهی با مشکلات فراوانی مواجه هستند. برخی از تحقیقات، (سمیر، ۲۰۰۱: دوال،۱۹۸۳) اشاره می کنند که نمایش های[۱۶] مختلف مجموعه ها سبب می شود تا دانش آموزان به یک سوال پاسخ های مختلفی دهند و حتی، در برخی موارد دچار تناقض گردند. به عنوان مثال، دوال (۱۹۸۳) از دانش‌آموزان ۱۲ و ۱۳ خواست که مجموعه‌ی اعداد طبیعی و مجموعه‌ی اعداد مربع کامل[۱۷] را در دو تمرین مجزا با هم مقایسه کنند. در تمرین اول، اعداد طبیعی بین ۱ تا ۷۰ را به صورت ده‌تایی در هفت ردیف نوشته شده بود و از دانش آموزان خواسته شد که اعداد مربع کامل را از بین آنها پیدا کنند و دو مجموعه را با هم مقایسه کنند و در تمرین دوم، دو مجموعه به صورت زیر، بیان شده بودند:

$$N = \{1,2,3,4,5, \dots\}$$

$$A = \{1,4,9,16,25, \dots\}$$

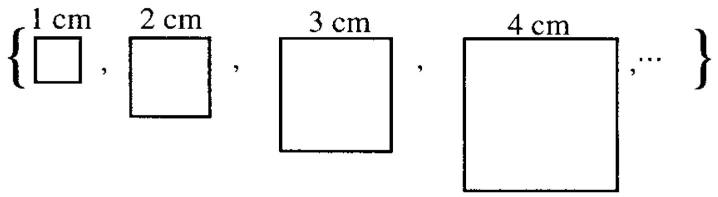
اکثر دانش آموزان در تمرین اول اظهار داشتند که تعداد اعداد مربع کامل از اعداد طبیعی کمتر است. استدلال آن ها بدین صورت بود که اعداد مربع کامل زیر مجموعه اعداد طبیعی است و اگر آن ها را کنار بگذاریم و یا خط بزنیم، هنوز اعداد دیگری باقی خواهند ماند. این در حالی بود که در تمرین دوم، برخی از دانش آموزان با متناظر قرار دادن

دو مجموعه به صورت یک به یک نتیجه گرفتند که تعداد اعضای دو مجموعه با هم برابرند. یافته‌های این تحقیق نشان داد که نحوه نمایش مجموعه‌ها، در انتخاب روشی که برای مقایسه توسط دانش آموزان به کار گرفته می‌شود موثر است. در همین راستا، سمیر و تیرش (۱۹۹۶) و سمیر (۲۰۰۱) اشاره کردند که برای مقایسه مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه اعداد مربع کامل، نمایش صریح[18] زیر، دانش آموزان را به سمت استفاده از تناظر یک به یک[19] به عنوان تنها معیار قابل قبول در مقایسه مجموعه های نامتناهی هدایت می کند:

$$N = \{1,2,3,4,5,\dots\}$$

$$A = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \dots\}$$

در کنار نمایش صریح، برخی تحقیقات مانند کتو و همکاران (۲۰۰۹) اشاره می کنند که نمایش هندسی[20] نیز می تواند به درک شهودی افراد برای مقایسه مجموعه های نامتناهی کمک کند. سمیر (۲۰۰۱) نیز برای مقایسه دو مجموعه ی بالا، از نمایش هندسی زیر استفاده کرد و متوجه شد که این نوع خاص از نمایش، در برخی موارد سبب کاهش پاسخ های اشتباه دانش آموزان می شود(سمیر، ۲۰۰۱. ص. ۲۹۲) :



چرا که هر شکل یک مساحت دارد و مساحت آن برابر است با مربع یک ضلع. پس تناظر یک به یکی بین تعداد مربع ها(با توجه به اضلاع آن ها) و مساحت های آن ها برقرار خواهد بود. با توجه به تحقیقات انجام گرفته در این مورد، می توان نمایش های مختلف زیر را در بیان مجموعه های نامتناهی و مقایسه آن ها در نظر گرفت:

۱- نمایش افقی۲- نمایش عمودی۳-نمایش صریح ۴-نمایش هندسی

البته لازم به ذکر است که در مورد اینکه، کدامیک از نمایش های اشاره شده در درک بهتر دانش آموزان می تواند موثرتر باشد، اختلاف نظر وجود دارد و در واقع، در موقعیت های مختلف، هر یک کارایی خاص خود را دارند. به عنوان مثال، در مورد مقایسه ی دو مجموعه زیر، همان طور که تیروش و سمیر (۱۹۹۶) و سمیر و تیروش (۲۰۰۷) نیز اشاره کرده اند، نمایش صریح می تواند در ایجاد درک بهتر موثرتر از سایر نمایش ها باشد:

$$N = \{1,2,3,4,5,\dots\}$$

$$B = \{3,4,5,6,7,\dots\}$$

$$B = \{1+2, 2+2, 3+2, 4+2, 5+2, \dots\}$$

در کنار نمایش های مختلف، تحقیقات مرتبط با این موضوع، معیارهای مختلفی را به شرح ذیل دسته بندی می کنند که توسط دانش آموزان به عنوان ملاک ارزیابی مجموعه های نامتناهی مورد استفاده واقع می شوند:

۱- معیار جزء – کل[21] (یک زیر مجموعه سره از هر مجموعه‌ی دلخواه، نسبت به خود مجموعه اصلی دارای اندازه کوچکتری است. پس هر ابر مجموعه ای، دارای اعضای بیشتری نسبت به تمام زیر مجموعه‌های خود- به جز خود- می‌باشد)

۲- معیار تناظر یک به یک (اگر بین دو مجموعه تناظر یک به یک برقرار باشد، هم ارزند و از نظر اندازه، هم اندازه می باشند)

۳- معیار منحصر به فردی[22](تنها یک بینهایت وجود دارد و همه مجموعه های نامتناهی از نظر اندازه با هم برابرند)

۴- معیار مقایسه ناپذیری[23] (مجموعه های نامتناهی از نظر اندازه غیر قابل مقایسه‌اند، چرا که تهدتد اعضای آن ها مشخص نیست)

البته، باید توجه کرد که، همانطور که در تحقیق سمیر (۲۰۰۱) هم اشاره گردیده، این معیار ها با نمایش های مختلف تغییر کرده و در برخی موارد سبب ایجاد تناقض در ذهن افراد می شود. کتو و همکاران (۱۹۸۶) نیز در تحقیق خود مشاهده کردند که استفاده از معیارهای مختلف برای مقایسه مجموعه‌های نامتناهی، در برخی موارد منجر به بروز پاسخ‌های مختلفی توسط افراد می‌شود.
به هر حال، آنچه به عنوان نتیجه ی اکثر تحقیقات گزارش شده، حاکی از این مهم است که اکثر دانش آموزان با مفهوم اندازه در مجموعه های نامتناهی مشکلات عدیده ای دارند. در این رابطه، نقش تعریف و تفاوت آن در مجموعه های متناهی و نامتناهی مشهود است. یک تعریف کلی برای مجموعه های نامتناهی که در برخی کتاب ها نیز مورد استفاده قرار می گیرد این گونه است که مجموعه ی نامتناهی مجموعه ای است که اضافه یا کم کردن تعداد متناهی عضو به آن، اندازه یا سایز آن را تغییر نمی دهد. این در حالی است که این تعریف، اساسا در مورد مجموعه های متناهی نادرست است. لذا مجموعه های متناهی و نامتناهی ذاتا متفاوت هستند و قوانین یکی، در مورد دیگری صادق نیست. تفاوت اساسی دیگر مجموعه های متناهی و نامتناهی، در مورد زیر مجموعه های آن هاست که می تواند ملاک مناسبی برای تعریف باشد. مجموعه ی نامتناهی را می توان اینگونه تعریف کرد که مجموعه ای است که با زیر مجموعه های ناسره ای از خود در تناظر یک به یک باشد. از طرفی، بنا به تجربه و کار با مجموعه های متناهی، پر واضح است که یک مجموعه ی متناهی نمی تواند با هیچ یک از زیر مجموعه های بدیهی خود در تناظر یک به یک باشد، در حالی که، بنا به تعریف فوق، مجموعه های نامتناهی می توانند با برخی از زیر مجموعه های غیر بدیهی (و نامتناهی) خود هم سایز باشند و اتفاقا همین تفاوت، محل اشکال اکثر دانش آموزان است. شایان ذکر است که برخی از کتاب ها از این تفاوت استفاده کرده و تعریف مجموعه های نامتناهی را براساس همین موضوع بیان کرده و مجموعه هایی که در این شرط صدق نمی کنند را متناهی در نظر می گیرند (لین و لین ،۱۹۸۱). به عنوان مثال، مجموعه ی اعداد طبیعی به صورت زیر:

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

با مجموعه ی اعداد طبیعی زوج که زیر مجموعه ای غیر بدیهی از اعداد طبیعی به فرم زیراست:

$$E = \{2, 4, 6, \dots\}$$

هم توان می باشد. لازم به یاد آوری است که برای اثبات هم توان بودن مجموعه ها، کافیست بتوان یک تناظر یک به یک(شامل یک نگاشت دوسویی که هم یک به یک است و هم پوشا) بین دو مجموعه تعریف کرد. در مورد اعداد طبیعی و اعداد طبیعی زوج، می توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

$$f: N \to E$$
$$f(n) = 2n$$

به سادگی می توان نشان داد که نگاشت فوق دوسویی است و در نتیجه دو مجموعه هم توان خواهند بود. نکته ی قابل تامل از منظر آموزشی این است که دانش آموزان از قبل می دانند که مجموعه ی اعداد طبیعی زوج

زیرمجموعه ی مجموعه ی اعداد طبیعی است و با کمک تجربیات قبلی خود نتیجه می گیرند که باید از نظر اندازه از اعداد طبیعی کوچکتر باشد.

هر چند، استفاده از واژه "اندازه" در مجموعه های نامتناهی مانند مجموعه های نامتناهی نبوده و اساسا دسترسی به آن به طور مشخص امکان پذیر نمی باشد، ولی تصور اینکه دو مجموعه ای که در تناظر یک به یک هستند، دارای یک عدد اصلی بوده و اصطلاحا هم کاردینال می باشند، دور از تصور نمی باشد. اتفاقا، این موضوع شروعی برای ورود به بحث عدد اصلی مجموعه ها می باشد که از نقطه نظر آموزشی در سطوح بالاتر، از جایگاه ویژه ای برخوردار است. به هر حال، همانطور که تحقیقات مختلف نشان می دهند و اشاره شد، در خصوص مقایسه ی مجموعه های نامتناهی، فارغ از نوع ،نمایش و معیارهای مورد استفاده، یک بدفهمی عمده که ظاهری منطقی دارد قابل مشاهده است: استفاده و تعمیم دانش و تجربیات قبلی در مورد مجموعه های متناهی به مجموعه های نامتناهی. در قسمت بعد، وجود یا عدم وجود چنین بدفهمی هایی را در مورد دنباله های نامتناهی، با توجه و تمرکز بر برخی از تحقیقات انجام شده، بررسی می کنیم.

۳. دنباله های نامتناهی

مورد دیگری از حالت های نامتناهی که مورد توجه آموزشگران ریاضی بوده و از جذابیت های زیادی هم برخوردار است، مطالعه ی دنباله های نامتناهی و درک دانش آموزان از مفهوم آن ها، و شناسایی بدفهمی های موجود در آن زمینه است. دنباله های عددی نامتناهی که گاهی در قالب بحث سری های نامتناهی نیز مطرح می شوند، از جمله مباحث مهمی است که هم در ریاضی مدرسه ای و هم در ریاضیات دانشگاهی مورد مطالعه قرار می گیرد. مهمترین دنباله ای که بیش از سایر دنباله های عددی نامتناهی مد نظر پژوهشگران آموزش ریاضی قرار گرفته، دنباله ... 0.9999 و مقایسه ی آن با عدد یک است که توسط محققان زیادی مانند تال(۱۹۹۰) و کرنو (۱۹۹۱) مورد مطالعه قرار گرفته است. نورتون و بالدوین (۲۰۱۲) اظهار می کنند که هرگاه بحثی در مورد تساوی یا عدم تساوی این دو عدد در کلاس درس مطرح شود، معلم با تعداد زیادی از مخالفان تساوی مواجه خواهد شد. در همین راستا، آن ها با استفاده از استدلال های گوناگون و از زوایای مختلف، نشان دادند که این تساوی برقرار است. یکی از روش های مورد استفاده ی آن ها، برهان خلف بود، چرا که در صورت عدم تساوی، باید بتوان عدد دیگری بین آن دو عدد پیدا کرد که این نکته، می تواند چالشی جدی برای دانش آموزان مخالف تساوی ایجاد نماید. ماندی و گراهام (۱۹۹۴) بیان کردند که اکثر دانش آموزان فکر می کنند که ... 0.9999 تقریبا برابر یک است و اختلاف آنها بسیار کم است ولی به طور دقیق با هم برابر نیستند. برخی از دانش آموزان نیز بر این باورند که ... 0.9999 عدد قبل از یک است! مناقان (۲۰۰۱) معتقد است که ریشه این اشتباه در اینجاست که از نظر اکثر دانش آموزان یک، یک عدد مشخص و معلوم است در حال که، ... 0.9999 یک فرایند نامتناهی و این دو نمی توانند برابر باشند. در واقع اکثر دانش اموزان، ... 0.9999 را به چشم یک دنباله می نگرند که همان طور که شوارزنبرگر و تال (۱۹۷۸) نیز اشاره کرده اند، تجربیات قبلی دانش آموزان از حد دنباله ها حاکی از عدم لزوم برابری حد با جملات دنباله است. لازم به ذکر است، همانطور که یاپ و همکاران (۲۰۱۱) نیز اشاره کرده اند، این مشکل تنها مختص دانش آموزان نبوده و در مورد معلمان نیز چنین بدفهمی های وجود دارد. این درحالی است که به گفته ی یاپ و همکاران (۲۰۱۱)، اعداد اعشاری نامتناهی تکراری مانند ...0.6666 و ...0.3333 بخشی از برنامه درسی ریاضی مدرسه ای هستند و معلمان باید درک درستی از چنین فرایندهایی داشته باشد. در خصوص عدد ....0.333 و مقایسه آن با عدد $\frac{1}{3}$، ادواردس (۱۹۹۷) و مناقان (۲۰۰۱) نیز به وجود مشکلات مفهومی در درک تساوی یک عدد کسری معلوم با یک عدد اعشاری نامختوم و نامتناهی اشاره می کنند.

مملو (۲۰۰۷) در مورد اعداد اعشاری نامتناهی یک بدفهمی دیگر از دانش آموزان را مورد مطالعه قرار داده است. بدین صورت که در مطالعه ی وی، از نظر برخی از دانش آموزان چنین اعدادی به عنوان بینهایت در نظر گرفته می شوند، چرا که تا بینهایت ادامه می یابند. در این تحقیق دانش آموزی- لیلی- معتقد بود که حاصل $\infty - \infty$ برابر صفر است، زیرا $\pi - \pi$ برابر صفر است و π مانند ∞ است. در تحقیق مملو، دانش آموز دیگری – جیم- برای درک مفهوم$\infty - \infty$ از عبارت $\frac{1}{6} - \frac{4}{6}$استفاده کرد چرا که اعداد $\frac{4}{6} = 0.6666\ldots$ و $\frac{1}{6} = 0.3333\ldots$ دارای تعداد نامتناهی جمله هستند و به عنوان بینهایت قابل تصور بودند. دانش آموزانی که این اعداد را به جای بینهایت قرار داده بودند، نتیجه گرفتند که حاصل$\infty - \infty$ می تواند در برخی موارد یک مقدار متناهی هم بشود زیرا $\frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = 0.5$، و دانش آموزانی که از مثال $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} = 0.3333\ldots$ استفاده کرده بودند نتیجه گرفتند که بینهایت منهای بینهایت همچنان بینهایت است ولی با مقداری متفاوت.

برهمند (۲۰۱۷) در تحقیق خود از طریق یک مسئله چالش ساز در رابطه با حد دنباله نتیجه گرفت که دانش آموزان سال آخر دبیرستان برای پاسخگویی به مسائل مربوط به فرایندهای نامتناهی، از الگوها و مدل های متناهی استفاده کرده و به دنبال تعمیم آن ها هستند. در تحقیق وی، a عددی مثبت و بزرگتر از یک در نظر گرفته شد و فاصله ی بین ۱ و a ، به صورت زیر تقسیم گردید:

$$1, a^{\frac{1}{n}},\ a^{\frac{2}{n}},\ a^{\frac{3}{n}},\ a^{\frac{4}{n}}, \ldots,\ a^{\frac{n-3}{n}},\ a^{\frac{n-2}{n}},\ a^{\frac{n-1}{n}},\ a^{\frac{n}{n}} = a.$$

وقتی n به سمت بینهایت میل می کند ، جملات اول به عدد ۱ و جملات آخر به عدد a همگرا می شوند:

$$a^{\frac{1}{n}} \to 1,\ a^{\frac{2}{n}} \to 1,\ a^{\frac{3}{n}} \to 1,\ a^{\frac{4}{n}} \to 1, \ldots$$ و

$$\ldots,\ a^{\frac{n-3}{n}} \to a,\ a^{\frac{n-2}{n}} \to a,\ a^{\frac{n-1}{n}} \to a,\ a^{\frac{n}{n}} \to a.$$

در این تحقیق از دانش آموزان خواسته شد تا در مورد وجود یا عدم وجود مرز بین دو قسمت دنباله و جای آن صحبت کنند.

$$\begin{gathered}
\sqrt[n]{a} \to 1\\
\sqrt[n]{a^2} \to 1\\
\sqrt[n]{a^3} \to 1\\
\sqrt[n]{a^4} \to 1\\
.\\
.\\
\times\\
.\\
.\\
\sqrt[n]{a^{n-3}} \to a\\
\sqrt[n]{a^{n-2}} \to a\\
\sqrt[n]{a^{n-1}} \to a\\
\sqrt[n]{a^{n}} \to a
\end{gathered}$$

در این مطالعه، بین پاسخ های کسانی که فکر می کردند چنین مرزی وجود دارد با سایرین تفاوت معناداری مشاهده شد. اکثر دانش آموزان بر این باور بودند که باید یک مرز بین آنها وجود داشته باشد و به دنبال یافتن مکان انتقال بودند. بیشتر افراد، جای مرز را دقیقا وسط جملات معرفی کردند. بررسی دقیقتر پاسخ ها از طریق مصاحبه نشان داد که در پشت تفکر این شرکت کنندگان، چنین الگو هایی نهفته بود:

$$\sqrt[9]{a}\ ,\ \ldots\ ,\ \sqrt[9]{a^5}\ ,\ \ldots\ ,\ \sqrt[9]{a^9}$$

$$\longrightarrow \quad \longleftarrow$$

این ها همگی نشان از یک اشتباه رایج در تفکر افراد در خصوص حالت های متناهی است:
حالت های نامتناهی تعمیمی از حالت های متناهی است.

۴. بحث

در نگاه اول، فرایند های نامتناهی به صورت تعمیمی منطقی از حالت های متناهی قابل تصور هستند. این تعمیم به قدری بدیهی به نظر می رسد که برای افرادی که با نظریه ی مجمو عه های نامتناهی آشنایی نداشته باشند، می تواند به صورت یک تناقض دیده شود و حتی عقل سلیم[۲۴] آن ها را دچار چالش کند. به عنوان یک مثال(اقتباس شده از هاوسون، ۱۹۹۸)، فرض کنید مطابق الگوی زیر، تعدادی توپ سفید و سیاه یک در میان و در یک ردیف قرار گرفته اند به طوریکه هر ردیف، با توپ سیاه شروع و به توپ سیاه ختم می شود و در هر مرحله، تعداد توپ ها یک عدد افزایش می یابد:

$$(1)\ \bullet\circ\bullet$$
$$(2)\ \bullet\circ\bullet\circ\bullet$$
$$\vdots$$
$$(n)\ \bullet\circ\bullet\circ\bullet\ \ldots\ \bullet\circ\bullet\circ\bullet$$

همان طور که مشاهده می شود، تعداد توپ های سیاه در هر ردیف از توپ های سفید بیشتر است. اگر همین الگو را به بازه $[1\quad 0]$ که دارای تعداد نامتناهی عدد حقیقی است تعمیم دهیم، با دانستن این نکات که بین هر دو عدد گویا عدد گنگی وجود دارد و بین هر دو عدد گنگ نیز عددی گویا، و بازه فوق با یک عدد گویا شروع و به یک عدد گویا نیز ختم می شود، اینگونه تصور می گردد که تعداد اعداد گویا در بازه ی فوق از اعداد گنگ بیشتر است. در حالی که، اینگونه نیست و الگوی بالا قابل تعمیم نمی باشد، چرا که: $\mathrm{Card}\ (Q^c) > \mathrm{Card}\ (Q)$.
هاوسون با استفاده از ایده تعمیم از متناهی به نامتناهی که به نظر وی در راستای عقل سلیم افراد اتفاق می افتد، استفاده کرده تا فرد را با یک چالش جدی روبرو کند. پس شاید چنین تعمیمی، که معمولا اولین تصوری است که به ذهن فرد خطور می کند، برای افراد آماتور در ریاضیات کاملا موجه به نظر می رسد و به همین دلیل، در عنوان این مقاله، به صورت "اشتباه منطقی" بیان شده است. اما برای یک ریاضیدان، به هیچ وجه اینگونه نیست، چرا که اصول موضوعه و تعاریف اولیه در مجموعه های نامتناهی ها، با تعاریف موجود در مجموعه های متناهی متفاوت هستند و یک ریاضیدان، به درستی واقف است که ابزار وی نه مشاهداتش بوده و نه دانش و تجربیاتی که که به فضاهای دیگر وابسته است و تنها می تواند در هر قسمت از ریاضیات، به اصول و تعاریف همان حوزه استناد کند.
لذا، از نقطه نظر آموزشی، مفید خواهد بود که به جای رویه مرسوم تدریس مفاهیم نامتناهی در امتداد مفاهیم متناهی، مفاهیم نامتناهی به صورت دنیای جدید از ریاضیات با اصول موضوعه و تعاریف خاص خود به یادگیرندگان عرضه گردد. چرا که اصولا تعمیم نتایج از دنیای متناهی به نامتناهی نادرست می باشد. به عنوان مثال، تساوی $0.9999999\ldots = 1$ فقط و فقط در بینهایت برقرار است و در هیچ مرحله ای قبل از بینهایت و به ازای هیچ مقداری از n، این رابطه درست نمی باشد.

$$0.\underbrace{99999999\ldots99}_{n\ \text{مرتبه}} \neq 1.$$

بر اساس یافته های تحقیق برهمند (۲۰۱۷)، تعمیم زیر، مهمترین عامل اشتباه توسط اکثر شرکت کنندگان در رابطه با سوال فوق بود:

$$0.9 < 1$$
$$0.99 < 1$$
$$0.999 < 1$$

و برای هر مقدار دلخواه n خواهیم داشت:

$$0.\underbrace{99999999\ldots99}_{n\ \text{مرتبه}} < 1$$

بنابراین، با ادامه همین الگو تا بینهایت، نتیجه ی به ظاهر درست زیر حاصل شد:

$$0.99999999\ldots < 1\ .$$

در حالی که هیچ مرحله ای قبل از بینهایت وجود ندارد که این تساوی در آن مرحله برقرار باشد.
یکی از دلایل عمده ی این اشتباه رایج، دنباله وار بودن مطالب به صورت اول متناهی بعد نامتناهی در ریاضیات مدرسه ایست. البته شاید در نگاه اول راه دیگری در این خصوص موجود نباشد- هر چند آشنا ساختن دانش آموزان با مفاهیم کلی در ابتدا و موارد خاص در ادامه، به عنوان روشی تحت عنوان از کل به جز در آموزش ریاضی از مدت ها قبل مطرح بوده است- ولی به هر حال، این امر سبب میگردد تا دانش آموزان تجربیات گذشته ی خود در مورد حالت های متناهی را به مواراد به ظاهر یکسان در حالت های نامتناهی تعمیم دهند.
عامل دیگر اشتباه، بر اساس تحلیل یافته های حاصل از تحقیق برهمند (۲۰۱۷) و مملو (۲۰۰۷)، این بود که اکثر شرکت کنندگان بینهایت را مانند یک عدد در نظر می گیرند که البته، این اشتباه نیز در اثر یک تعمیم نادرست به وجود می آید.
برهمند (۲۰۱۷) مشاهده کرد که وقتی n به سمت بینهایت میل می کند، در نظر گرفتن بینهایت به صورت یک عدد، عاملی بود که آن ها را به سمت دنبال کردن یک مرز مشخص برای انتقال و یافتن نقطه ی میانی بین یک و بینهایت، مانند یک و n، هدایت می کرد. این اشتباه را به طور گسترده درمورد یافتن حاصل عبارت $\infty - \infty$ می توان جسنجو کرد، که الهام گرفتن از عبارت $n - n$ ، افراد را به سمت ساختن یک نتیجه نادرست هدایت می کند.
در مورد مقایسه مجموعه های نامتناهی نیز یافته های پژوهشی، این موضوع را تائید می کنند. تال (۱۹۹۰) نشان داد که دانش آموزان در مقایسه ی مجموعه ی اعداد طبیعی با اعداد زوج و فرد با استناد به قانون N=EUO دچار مشکل شدند. چرا که هر دو مجوعه ی اعداد زوج و فرد، زیر مجموعه های اکید مجموعه ی اعداد طبیعی هستند و تجربه ی قبلی آن ها حاکی از این قانون است که هر کل از اجزای خود بزرگتر است. یافته های تیروش (۱۹۹۹) نیز موید این امر است که دانش آموزان در درک این موضوع که مجموعه های نامتناهی می توانند با بعضی زیر مجموعه های اکید خود در تناظر یک به یک باشند عاجزند. به هر حال، سایر مطالعات انجام گرفته مانند تحقیق گیمنز (۱۹۹۰) و یا ممونا-دانز (۲۰۰۱) نشان می دهند که تعداد قابل توجهی از دانش آموزان قادر به درک درست این مفهوم نیستند و عمده ترین مشکل موجود در این زمینه، تعمیم قوانین و رویه های موجود در حالت های متناهی به نامتناهی است ، چرا که فهم دانش آموزان از بینهایت و فرایندهای نامتناهی، به شدت تحت تاثیر دانش و تجربیات قبلی آنها راجع به حالت های متناهی است و از نظر بیشتر آن ها، حالت های نامتناهی تعمیمی از حالت های متناهی هستند.
براساس آنچه مورد بحث قرار گرفت، می توان در رابطه با موضوع اصلی این مطالعه در مورد عمده ترین عوامل

مشکل ساز در مورد حالت های نامتناهی، با تمرکز بر مقایسه مجموعه های نامتناهی و دنباله های نامتناهی، موارد زیر را دسته بندی می باشند:

۱- تعمیم نادرست از متناهی به نامتناهی
۲- در نظر گرفتن بینهایت به عنوان یک عدد

البته همان طور که اشاره شد، مورد دوم، نتیجه ای از مورد اول می باشد و تنها ، به دلیل برجسته تر شدن موضوع، به عنوان یک مورد مجزا عنوان گردیده است.

به هرحال، دو نکته ی مهم زیر در خصوص حالت های متناهی و نامتناهی باید مد نظر یادگیرندگان و آموزشگران ریاضی قرار گیرد:

۱- قوانین، الگوها، نتایج و رویه ها در دنیای متناهی، به دنیای نامتناهی قابل تعمیم نیستند.
۲- هیچ مرز مشخصی بین حالت های متناهی و نامتناهی وجود ندارد.

۶. نتیجه‌گیری و پیشنهادات آتی

با بررسی مطالب مطرح شده، آنچه به وضوح قابل بیان می باشد این است که دنیای نامتناهی ها در ریاضیات، دنیایی مجزا از فرایندهای متناهی است که دارای ویژگی ها و روابط مخصوص به خود می باشد. در نظر گرفتن نامتناهی ها در امتداد فرایند های متناهی و به عنوان یک تعمیم منطقی از آن ها سبب بروز مشکلات مهمی در تفکر افراد راجع به نامتناهی خواهد شد. در همین راستا، تعمیم قوانین و روابطی که افراد قبلا در دنیای متناهی تجربه کرده اند و در ذهن آن ها قرار گرفته به دنیای نامتناهی، مهم ترین عامل بروز اشتباه در بین دانش آموزان می باشد. البته موارد دیگری مانند مفروض داشتن بینهایت مانند یک عدد حقیقی نیز یکی از پر تکرار ترین بدفهمی ها در مورد بینهایت و فرایندهای نامتناهی است که در دنباله های نامتناهی مورد بحث قرار گرفت. شاید بیان این مطالب در نگاه اول نشان از وجود بدفهمی و ناتوانی(و یا حداقل کم توانی) دانش آموزان باشد، ولی نگاهی به تاریخ ریاضی در زمینه ی بینهایت می تواند این مشکل را کمی موجه جلوه دهد. چرا که ریاضیدانان بزرگی مانند کانت، ارسطو و کرونکر، و مکتب هایی مانند فیثاغورثیان نیز در پذیرش این مفهوم دچار تردید و بدبینی بودند و علاج فرار از در گیر شدن با پارادوکس ها را در کنار گذاشتن بینهایت به عنوان مفهومی بالفعل می دیدند. جهان پیرامون فرد که منشا عینی تجربیات و قابل استنادترین بخش از دانش وی می باشد، نمی تواند بینهایت را در بر گیرد. حتی برخی بر این باورند که پذیرش بینهایت به معنای جمع ضدین است و تنها زمانی می توان راجع به آن صحبت کرد که نهایت مشخص باشد که نهایت در بینهایت است. از طرفی، همان طور که بحث شد، برخی اصول به ظاهر بدیهی هم در دنیای نامتناهی ها ارزش خود را از دست می دهند. پس چگونه می توان از دانش آموزان انتظار داشت که بتوانند این مفهوم عجیب و پیچیده را که قدمتی چند هزار ساله دارد، به خوبی درک کنند. قطعا، در این حوزه نیاز به آموزشی اصولی مبتنی بر تاریخ ریاضی و سیر تکاملی این مفهوم با تمرکز بر متفاوت بودن دنیای نامتناهی ها در ریاضیات خواهیم بود. از سوی دیگر، با وجودی که تعمیم رویه ها و الگوها یک ابزار کارامد در حل مسئله ی ریاضی بوده و از نقطه نظر آموزشی نیز تعمیم و الگویابی در برنامه درسی اکثر کشورها قرار گرفته است، این مطالعه به لزوم تمرکز بر محدوده های قابل قبول تعمیم تاکید داشته و انتقال از حالت های متناهی به نامتناهی را به عنوان یکی از قسمت های مهم ریاضی که تعمیم در آن نه تنها درست نبوده، بلکه منشا اشتباهات پرتکراری نزد دانش آموزان می باشد، معرفی می کند. به علاوه، مثال های بحث شده در این مطالعه، این فرصت را در اختیار یادگیرندگان و یاددهندگان ریاضی قرار می دهد تا برخی از بدفهمی های خود در این حوزه را اصلاح نمایند و در موقعیت های مناسب از آن ها استفاده نمایند. بررسی بیشتر سایر تعمیمات و محدوده ی مجاز آن ها در حوزه های

مختلف ریاضی و به ویژه، حالت های مختلف نامتناهی و تفاوت های بین نامتناهی های شمارا و ناشمارا ، به عنوان حوزه های پژوهشی مرتبط با این تحقیق به آموزشگران ریاضی توصیه می گردد.

پی نوشت ها

1-Infinity
2-Paradox
3-Russell
4- Zeno
5- Hilbert’s Grand Hotel
6- Achilles and the Tortoise
7- Tennis Ball Conundrum
8-Cantor
9-Potential Infinity
10-Actual Infinity
11-Infinity Large
12-Infinitesimal
13-Cardinal
14-Comparing Infinite Sets
15-Infinite Sequences
16-Representation
17-Perfect Square
18-Explicit Representation
19-One-to-one-Correspondence
20-Geometric Representation
21- Part-whole
22- Single Infinite
23- Incommensurable
24-Common Sense

مراجع

1. Barahmand, A, “The boundary between finite and infinite states through the concept of limits of sequences”, *International Journal of Science and Mathematics Education*, Vol. 15, No. 3, pp. 569–585, 2017.
2. Cornu, B., “Limits”, *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht Boston London: Kluwe Academic Publisher, pp. 153-166. 1991.
3. Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, A. & Brown, A., “Some Historical Issues and Paradoxes Regarding the Concept of Infinity: An APOS-based analysis: Part 2”, *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 60, pp. 253-266, 2005.
4. Duval, R., “‘L’Obstacle du dédoublement des objets mathématiques”, *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 14, pp. 385–414, 1983.
5. Edwards, B., *An undergraduate student’s understanding and use of mathematical definitions in real analysis*. In J. Dossey, J. Swafford, M. Parmantie, A. Dossey (Eds.), *Proceedings of the Nineteenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Columbus, OH, *1*, 17- 22, 1997.
6. Gimenez, J., “About intuitional knowledge of density in Elementary School”, *Proc. PME,* Vol. 14, No. 3, pp. 19-26. 1990.
7. Mamolo, A., *Infinite Magnitude vs Infinite Representation: The Story of* π. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Ed.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 233-240). Seoul, Korea: PME, 2007.
8. Kattou, M., Kontoyianni, K. & Christou, C., *Teachers’ perception about infinity: a process or an object?*. Presented at the Sixth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, France, Lyon, 2009.
9. Kondratieva, M, “Understanding mathematics through resolution of paradoxes”, Memorial University of Newfoundland, 2009.
10. Mamolo, A., “How to act? A question of encapsulating infinity”, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education,* Vol. 14, No. 1, pp. 1-22, 2014.
11. Mamolo, A., Zazkis, R., “Paradoxes as a window to infinity”, *Research in Mathematics Education,* Vol. 10, No. 2, pp. 167 – 182, 2008.
12. Mamona-Downs, J., “Letting the intuitive bear on the formal: A didactical approach for the understanding of the limits of a sequence”, *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 48, pp. 259–288, 2001.
13. Monaghan, J., “Young peoples’ ideas of infinity”, *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 48, pp. 239-257, 2001.
14. Mundy, F. J., Graham, K., “Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives and integrals”, *MAA Notes,* Vol. 33, pp. 31–45, 1994.
15. Norton, A., Baldwin, M, “Does 0.999… Really Equal 1?”, *The Mathematics Educator,* Vol. 21, No. 2, 58–67, 2012.
16. Sacristan, A. I. , Noss, R., “Computational Construction as a Means to Coordinate Representations of Infinity”, *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* Vol. 13, pp. 47-70, 2008.
17. Schwarzenberger, R., Tall, D., “Conflicts in the learning of real numbers and limits”, *Mathematics Teaching,* No. 82, pp. 44-49, 1978.
18. Tall, D., “Inconsistencies in the learning of calculus and analysis”, *Focus on Learning Problems in Mathematics,* Vol. 12, No. 3&4, pp. 49-64, 1990.

19. Tall, D., “*The transition to advanced mathematical thinking: Function, limits, infinity and proof*”, In D.A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 495-511). New York: Macmillan. 1992.
20. Tirosh, D., “Finite and infinite sets: Definitions and intuitions”, *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology,* Vol. 30, No. 3, pp. 341-349, 1999.
21. Tirosh, D., Tsamir, P., “The role of representations in students’ intuitive thinking about infinity”, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 27, pp.33–40, 1996.
22. Tsamir, P., “When the same is not perceived as such: The case of infinite sets”, *Educational studies in mathematics*, Vol. 48, pp. 289-307, 2001.
23. Tsamir, P., T. Dreyfus, “Comparing infinite sets — a process of abstraction. The case of Ben”, *Journal* of *Mathematical Behavior*, Vol. 21, pp.1–23, 2002.
24. Tsamir, P., Tirosh, D, Teaching for Conceptual Change: The Case of Infinite Sets. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. amvakoussi (Eds.), *Reframing the Conceptual Change Approach in Learning and Instruction* (pp. 299-316). Oxford, UK: Elsevier, 2007.
25. Yopp, D. A.,. Burroughs, E. A., Lindaman, B. J., “Why it is important for in-service elementary mathematics teachers to understand the equality .999. . . = 1”, *The Journal of Mathematical Behavior,* Vol. 30, pp. 304– 318, 2011.

۲۶. شهریاری، پرویز (۱۳۸۰)، فلسفه، اخلاق و ریاضیات، گردآوری و ترجمه، انتشارات پژوهنده، تهران.

۲۷. گراهام، لوران.، کانتور، ژان میشل (۲۰۱۵)، نام گذاری بر بینهایت ها، مترجم: زارع نهندی، رحیم (۱۳۹۴)، انتشارات فاطمی، تهران.

۲۸. لین، یوفنگ.، لین، شوینگ (۱۹۸۱)، نظریه مجموعه ها و کاربردهای آن، مترجم: رسولیان، عمید(۱۳۸۸) چاپ سیزدهم، مرکز نشر دانشگاهی، تهران.

۲۹. هاوسون، جفری (۱۹۹۸)، ریاضیات و عقل سلیم، مترجم: گویا، زهرا (۱۳۸۰)،مجله ی رشد آموزش ریاضی، شماره ۵۸، صص ۱۲-۴، دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش، تهران.